



TITLE:

曲り円管内流の二重解の安定性(流れの不安定性と乱流)

AUTHOR(S):

柳瀬, 真一郎; 後藤, 望; 山本, 恭二

CITATION:

柳瀬, 真一郎 ...[et al]. 曲り円管内流の二重解の安定性(流れの不安定性と乱流). 数理解析研究所講究録 1988, 661: 23-38

ISSUE DATE:

1988-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/100609>

RIGHT:

曲り円管内流の二重解の安定性

岡山大学工学部 柳瀬 真一郎 (Shinichiro Yanase)

岡山大学工学部 後藤 望 (Nozomu Gotoh)

岡山大学工学部 山本 恭二 (Kyoji Yamamoto)

§ 1. 緒言

曲り管内では、直管とは異なり遠心力の効果のために二次流れが生じる。理論的研究を最初に行ったのはDean^{1) 2)}であるが、その後今日に至るまで、円形、矩形断面等、様々な断面形状を持つ曲り管内流の理論的、実験的、数値実験的研究が活発に行われている。非常に小さな曲率の曲り管内流は、Dean数($= Dn$)と呼ばれるパラメータによって規定される(Dean近似)。矩形管内流においては、小さなDean数では、上下2つの対称渦からなる二次流れを持つ流れが実現し、Dean数がある値より大きくなると、曲りの外側壁近くに2つの副渦を伴う4渦の流れとなることが以前より報告されている。一方、円形断面に対しても矩形管と同様に、2つの異なった形の二次流れを持つ解が存在することがDennis & Ng³⁾によって理論的に示された。彼らは、 $Dn < 956$ では2渦解しかなく、 $Dn > 956$ では2渦と4渦の二重解が存在することを報告している。(なお、矩形管に対して、二重解の存在がわかったのは比較的最近である⁴⁾。)しかし、二重解のどちらが実際の流れで生じるかは、これらの解の安定性を調べることによって初め

て決定される。今回の研究は、このために、定常解に微小攪乱を加えて線形安定性を調べた。さらに、ナビエーストークス方程式の数値計算を行なうことによって、線形安定性ではわからない流れの形態の大きな変化を調べた。

以前の研究の解析方法は、Dean数展開法⁵⁾、有限差分法³⁾、スペクトル法⁶⁾などが適用されてきたが、今回は、円形断面の円周角方向にはフーリエ級数展開、半径方向にはチェビシェフ多項式展開を用いたスペクトル法を使用している。ただし、これまでのスペクトル法⁶⁾では、半径方向の方程式に対し境界条件をチェビシェフ多項式内に組み入れてきた(Chebyshev-Tau法)が、今回は、チェビシェフ多項式を変形し、さらに多項式を付け加えることによって、境界条件を満たす新しい展開関数系を組み立てて利用した。

§ 2. 基礎方程式

図1に示す座標系を用いる。ここで、 C は管の横断面の中心、 a は円管半径、 α は円周角、 O は管の曲率中心、 L は曲率半径、 θ は管の曲りの方向を示す。

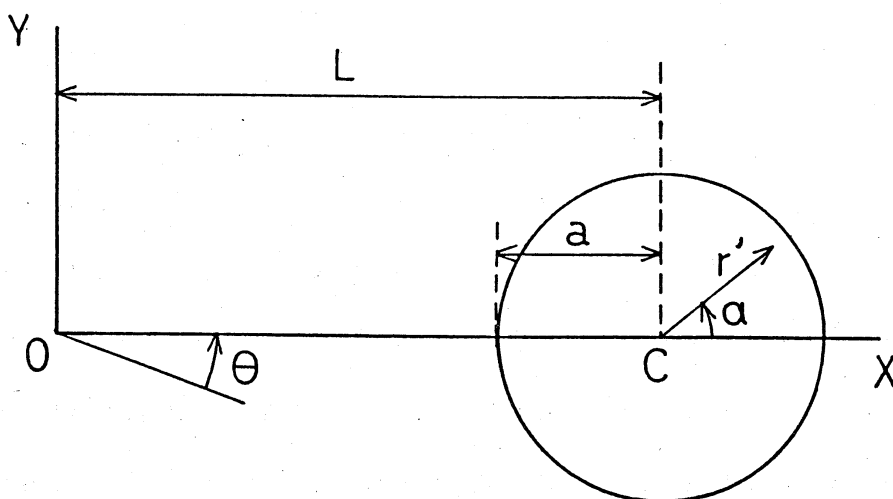


図1. 座標系

今、曲率 a/L が非常に小さいと仮定するDean近似によって得られる無次元基礎方程式は、次の通りである。

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \Delta \psi}{\partial r} \right) + \Delta^2 \psi + W \left(\sin \alpha \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\cos \alpha}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial \alpha} \right) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial W}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \Delta W + Dn \quad (2.2)$$

ここで、
$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2},$$

ψ は流れ関数、 W は管軸方向速度を示す。

また、 Dn はDean数と呼ばれる無次元量で、以下の式で定義される。

$$Dn = G a^3 (2a/L)^{1/2} / \mu \nu \quad (2.3)$$

ただし、 G は管軸方向の一定圧力勾配、 μ は粘性係数、 ν は動粘性係数を表わす。

境界条件は、管の壁面で速度がゼロとなることから、以下の様になる。

$$W = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad (r = 1) \quad (2.4)$$

§ 3. 定常解の解法 (Fourier-Chebyshev展開法)

まず最初に、定常状態に対する数値解を求める。解析方法は、円周角方向 (α) にはフーリエ級数展開、半径方向 (R) には境界条件を満足する様、チェビシェフ多項式に R の多項式を付け加えて展開を行う。ただし、半径方向に対しては、チェビシェフ多項式の変域が、 $-1 \sim 1$ であるため、媒介変数 $R (= 2r - 1)$ を用いた。

まず、 ψ および W を、流れが管断面の水平中心軸に関して対称であると

仮定して、フーリエ級数展開を行うと、以下の式となる。

$$\psi(R, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(R) \sin n\alpha \quad (3.1)$$

$$W(R, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(R) \cos n\alpha \quad (3.2)$$

次に、 $f_n(R)$ 、 $W_n(R)$ をチェビシェフ多項式で展開する。(ただし、 $T_m(R)$ はチェビシェフ多項式を表わす。)

$$f_n(R) = \sum_{m=0}^{\infty} F_{nm} \psi_m^{(n)}(R) \quad (3.3)$$

$$n \geq 2$$

$$\psi_m^{(n)}(R) = (R-1)^2 (R+1)^2 T_m(R)$$

$$n=1$$

$$\psi_m^{(n)}(R) = \begin{cases} (R-1)^2 (R+1) (R+2) & (m=0) \\ (R-1)^2 (R+1)^3 T_{m-1}(R) & (m \neq 0) \end{cases}$$

$$W_n(R) = \sum_{m=0}^{\infty} W_{nm} \phi_m^{(n)}(R) \quad (3.4)$$

$$n \geq 1$$

$$\phi_m^{(n)}(R) = (R-1) (R+1) T_m(R)$$

$$n=0$$

$$\phi_m^{(n)}(R) = \begin{cases} (R-1) (R+3) & (m=0) \\ (R-1) (R+1)^2 T_{m-1}(R) & (m \neq 0) \end{cases}$$

このように、チェビシェフ多項式に R の多項式を付け加えて展開を行ったのは、後の微小攪乱方程式を解法する上で、従来のチェビシェフ多項式のみで展開する場合 (Tau法) と比べて、今回の方法が適していたからである。

これらの展開式を、非定常項を除く基礎式 (2.1)、(2.2) に代入して、 $\sin n\alpha$ 、 $\cos n\alpha$ ($n=0,1,2,\dots$) の係数を比較することにより、

R についての常微分方程式が得られる。これらを、R について Collocation 法を適用して連立代数方程式に置き換え、逐次代入法を用いて定常解を求める。

§ 4. 微小攪乱方程式と解法

前章より、各 Dean 数に対する定常解（2 渦解および 4 渦解）が求まる。次は、これらの 2 つの解に対し、どちらが安定であるかを、微小攪乱方程式を解くことによって、解の安定性を調べる。

基礎式（2. 1）、（2. 2）の ψ および W に攪乱項を加え、整理することによって、以下の線形化された微小攪乱方程式が得られる。（ただし、“ $\hat{}$ ” は攪乱項を示し、他は定常項を示す。）

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \hat{\psi}}{\partial t} = & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \Delta \hat{\psi}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \alpha} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \frac{\partial \Delta \hat{\psi}}{\partial r} - \frac{\partial \Delta \psi}{\partial r} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \alpha} \right) \\ & + \Delta^2 \hat{\psi} + W \left(\sin \alpha \frac{\partial \hat{W}}{\partial r} + \frac{\cos \alpha}{r} \cdot \frac{\partial \hat{W}}{\partial \alpha} \right) \\ & + \left(\sin \alpha \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\cos \alpha}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial \alpha} \right) \hat{W} \end{aligned} \quad (4. 1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{W}}{\partial t} = & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial \hat{W}}{\partial \alpha} + \frac{\partial W}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \hat{W}}{\partial r} - \frac{\partial W}{\partial r} \cdot \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \alpha} \right) \\ & + \Delta \hat{W} \end{aligned} \quad (4. 2)$$

定常解は、管断面において対称であるため（すなわち、 ψ は SIN 級数、 W は COS 級数で表わされる。）、攪乱は次の対称、反対称攪乱の 2 通りに分けることができる。よって、定常解と同様に、フーリエーチェビシェフ展開を行い、特に、時間依存性を $\exp(\lambda t)$ とする。

(I) 対称攪乱

$$\hat{\psi}(R, \alpha, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{F}_{nm} \Psi_m^{(n)}(R) \sin n \alpha e^{\lambda t} \quad (4.3)$$

$$\hat{W}(R, \alpha, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{W}_{nm} \Phi_m^{(n)}(R) \cos n \alpha e^{\lambda t} \quad (4.4)$$

(II) 反対称攪乱

$$\hat{\psi}(R, \alpha, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{F}_{nm} \Psi_m^{(n)}(R) \cos n \alpha e^{\lambda t} \quad (4.5)$$

$$\hat{W}(R, \alpha, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{W}_{nm} \Phi_m^{(n)}(R) \sin n \alpha e^{\lambda t} \quad (4.6)$$

ここで、 $\Psi_m^{(n)}$ 、 $\Phi_m^{(n)}$ は、(3.3)、(3.4)と同様のチェビシェフ多項式を含む展開関数を表わす。

以上の定常項及び攪乱項の展開式を式(4.1)、(4.2)に代入し、(I)、(II)各々について、固有値方程式を導き、固有値 λ を求める。

ただし、反対称攪乱における $\hat{\psi}$ の $n=0$ の項は、管軸方向に対して一様な回転流れと考えられるが、今回はこの項を省いて計算を行った。

§5. 計算結果と考察

図2～図4は、定常状態に対する各Dean数の二次流れの流線および管軸方向速度一定の線を示している。定常解は、 $96 \leq Dn \leq 10000$ の範囲で求めることができ、そのうち二重解は、 $956 \leq Dn \leq 10000$ の範囲で求めることができた。 $Dn > 5000$ に対する解は、我々の知る範囲では、これまでには報告されていない。

これらの解の特徴は、Dean数が増加するにつれて、ともに二次流れの渦強さ及び管軸方向速度は増し、主流の渦中心は次第に内側壁へと移動している。特に、4渦解の副渦は、渦強さが大きくなるとともに、渦の形状は次第に小さくなっていることが確認できる。また、最大軸方向速度は、2渦解では対称軸上に1箇所存在するが、4渦解では副渦の影響で2箇所存在しているのが特徴的である。

次に、これらの二重解（2渦解、4渦解）の線形安定性を調べた結果を表1～表3に示す。各表において、 N はフーリエ級数の項数、 M はチェビシェフ多項式の項数を表わしている。また、固有値は、 $\lambda_1 \sim \lambda_5$ で表わし、実部の値の大きいものから順次5項並べている。ただし、数値の上側が実部、下側は虚部を示している。表は、各項数に対する固有値の精度を示し、十分に収束した固有値の値で安定性の判別を行う。今回の計算では、比較的小さなDean数では、フーリエ級数およびチェビシェフ多項式の項数を増した時の収束性は良好であるが、大きなDean数の場合には、特に、4渦解に対する安定性計算の固有値の収束はやや緩慢である。けれども、最大固有値 λ_1 については、少なくとも2桁程度（ただし、 $Dn = 10000$ に対しては1桁程度）の有効数字が保証されることがわかる。安定性の基準は、攪乱項の時間依存性を $\exp(\lambda t)$ とおいたため、固有値 λ の実部が負なら攪乱項は減衰して解は安定となり、正なら不安定である。

まず、2渦解は、対称、反対称攪乱のどちらに対しても負の固有値しか得られないことから、任意の微少な攪乱に対して安定であることがわかる。ところが、4渦解は、対称攪乱に対しては安定であるが、反対称攪乱では正の固有値が現われることから不安定であることがわかる。従って、4渦

解は安定な解であるとは言えない。

線形安定性によって、4渦解は不安定であることがわかったが、これだけでは2渦解だけが曲り管内流で実現される状態であるとは言えない。そこで、4渦解に対して非定常問題を取り扱った。図5は、 $Dn = 1000$ の4渦解に反対称な攪乱を加えた時の流線の時間発展である。攪乱は、反対称項のフーリエ-チェビシェフの展開係数の初項 \hat{F}_{10} 、 \hat{W}_{10} に 10^{-4} のオーダーの攪乱を加えた。図より、4渦解の副渦は、対称性を失って壊れ、最終的に2渦解と全く一致する（図2を参照）。結果は、対称解である4渦解が、反対称攪乱により上下非対称な流れを経て、再び対称解である2渦解へと変化していることを示している。ちなみに、2渦解に攪乱を与えてみたが、流れの大きな変化はなかった。

以上より、微小な曲率に対して、同じDean数で生じる二重解（2渦解、4渦解）は、 $Dn \leq 10000$ の範囲において、2渦解のみ安定であり、実現されるのは2渦解であることが示された。

§ 6. 結言

今回の研究によって、緩やかな曲率を持つ円形断面の曲り管内流れに生じる二重解（2渦解、4渦解）は、 $Dn \leq 10000$ の範囲において、2渦解は任意の微小攪乱に対して安定、4渦解は対称攪乱のみ安定であることがわかった。また、4渦解に反対称な攪乱を加えると、解は2渦解へと収束することがわかった。

今回の解析では、微小な曲率のみを取り扱ってきたが、有限の曲率に対する二重解の安定性は、今後の課題である。

参考文献

- 1)W.R.Dean; Phil. Mag. 4(1927)208-223.
- 2)W.R.Dean; Phil. Mag. 5(1928)673-695.
- 3)S.C.R.Dennis & M.Ng; Q.J. Mech. appl. Math. 35(1982)305-324.
- 4)K.H.Winters; J. Fluid Mech. 180(1987)343-369.
- 5)M.D.Van Dyke; J. Fluid Mech. 86(1978)129-145.
- 6)森田 浩之; 岡山大学機械工学専攻修士論文 (1986)

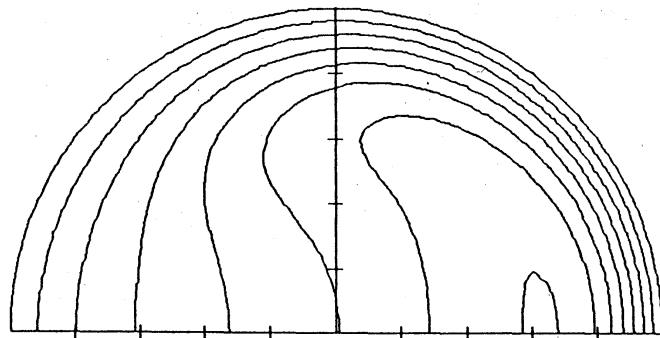
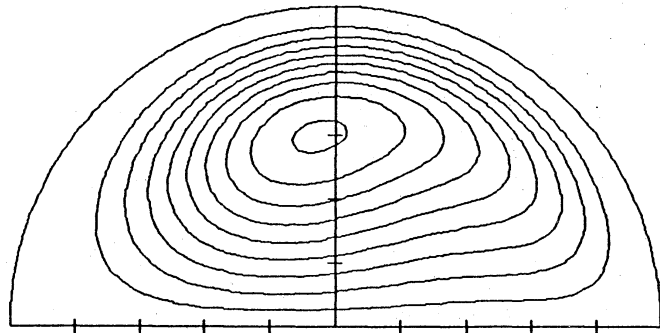
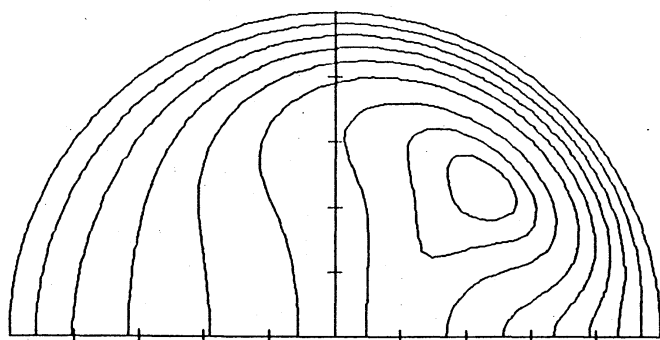
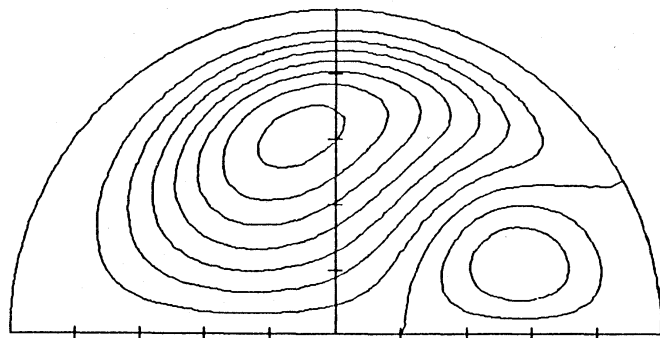
$Dn=1000$  $Dn=1000(4)$ 

図2. $Dn=1000$ の流線(上)及び管軸方向等速度線(下)

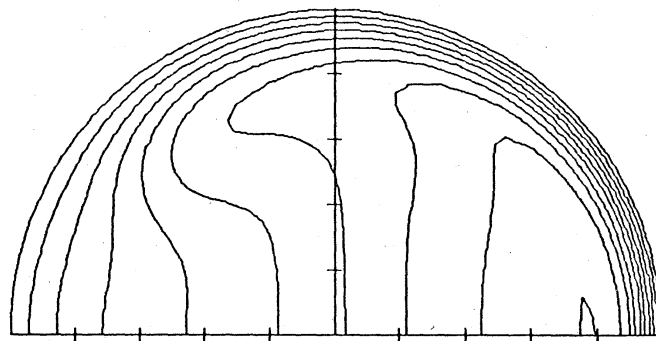
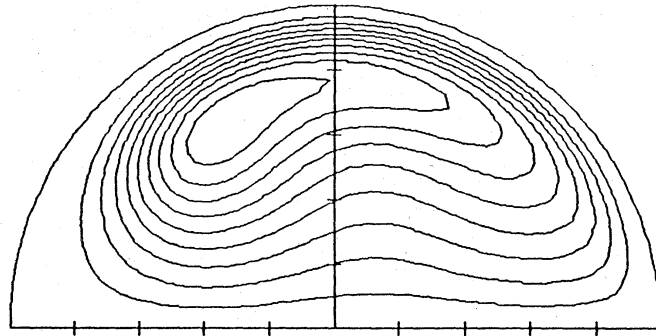
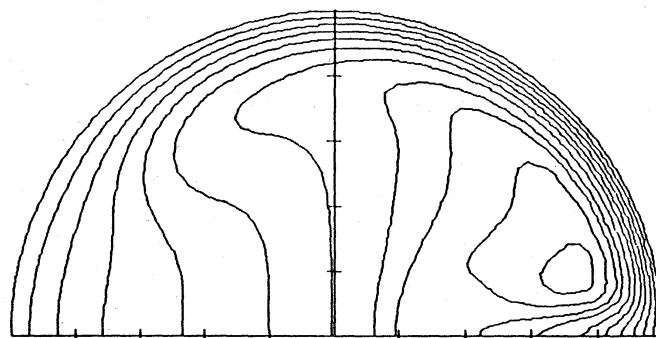
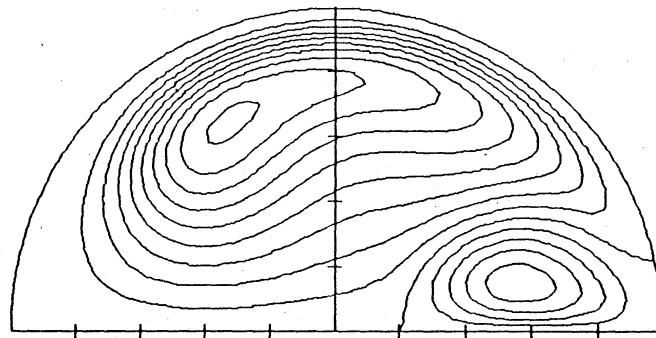
$Dn=5000$  $Dn=5000(4)$ 

図3. $Dn=5000$ の流線(上)及び管軸方向等速度線(下)

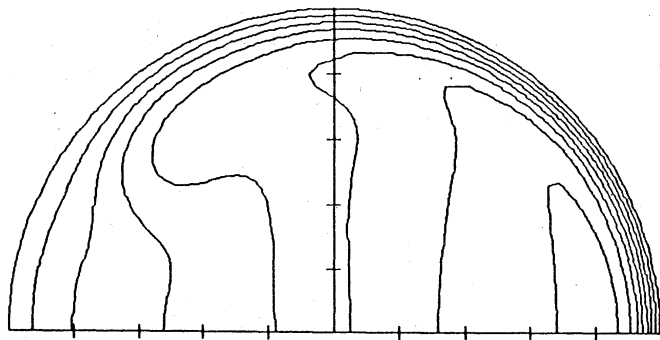
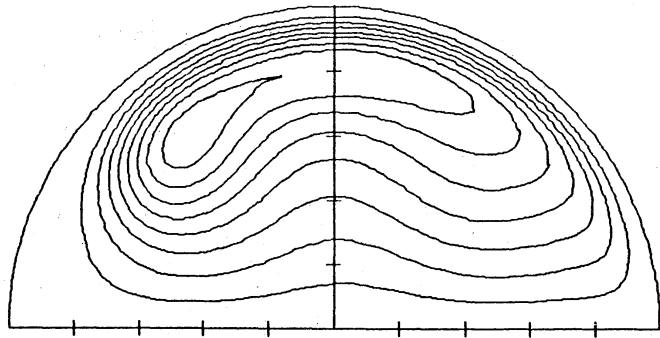
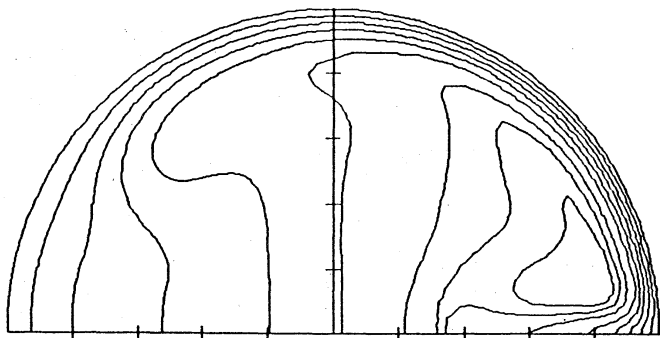
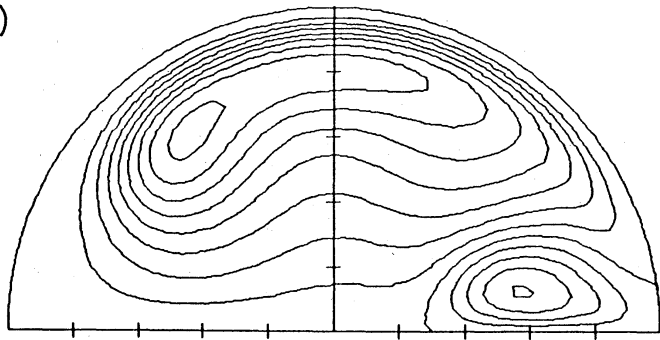
$Dn=10000$  $Dn=10000(4)$ 

図4. $Dn=10000$ の流線(上)及び管軸方向等速度線(下)

D n = 1000

[SYMMETRIC DISTURBANCE]

N	M	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
5	5	-1.7461E+01	-2.1961E+01	-2.1961E+01	-3.6619E+01	-3.6619E+01
		0.	7.1759E+01	-7.1759E+01	9.8020E+01	-9.8020E+01
10	10	-1.7578E+01	-2.2719E+01	-2.2719E+01	-3.9239E+01	-3.9239E+01
		0.	7.0536E+01	-7.0536E+01	1.0326E+02	-1.0326E+02
25	20	-1.7577E+01	-2.2709E+01	-2.2709E+01	-3.9312E+01	-3.9312E+01
		0.	7.0539E+01	-7.0539E+01	1.0319E+02	-1.0319E+02
30	25	-1.7577E+01	-2.2709E+01	-2.2709E+01	-3.9312E+01	-3.9312E+01
		0.	7.0539E+01	-7.0539E+01	1.0319E+02	-1.0319E+02

[ANTI-SYMMETRIC DISTURBANCE]

N	M	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
5	5	-1.3308E+01	-2.5572E+01	-2.5572E+01	-4.7355E+01	-4.7355E+01
		0.	7.2286E+01	-7.2286E+01	9.4846E+01	-9.4846E+01
10	10	-1.3666E+01	-2.5205E+01	-2.5205E+01	-5.1603E+01	-5.5789E+01
		0.	7.0031E+01	-7.0031E+01	0.	1.0031E+02
15	15	-1.3664E+01	-2.5190E+01	-2.5190E+01	-5.1596E+01	-5.5678E+01
		0.	7.0030E+01	-7.0030E+01	0.	1.0026E+02
30	25	-1.3664E+01	-2.5190E+01	-2.5190E+01	-5.1596E+01	-5.5679E+01
		0.	7.0030E+01	-7.0030E+01	0.	1.0025E+02

D n = 1000(4)

[SYMMETRIC DISTURBANCE]

N	M	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
5	5	-1.5595E+01	-1.7495E+01	-1.7495E+01	-2.5271E+01	-2.5271E+01
		0.	8.0903E+00	-8.0903E+00	7.2836E+01	-7.2836E+01
10	10	-1.9560E+01	-2.6988E+01	-2.6988E+01	-2.8285E+01	-2.8285E+01
		0.	7.2709E+01	-7.2709E+01	2.4515E+01	-2.4515E+01
25	20	-1.9289E+01	-2.7060E+01	-2.7060E+01	-3.0318E+01	-3.0318E+01
		0.	7.2790E+01	-7.2790E+01	2.9399E+01	-2.9399E+01
30	25	-1.9289E+01	-2.7060E+01	-2.7060E+01	-3.0318E+01	-3.0318E+01
		0.	7.2790E+01	-7.2790E+01	2.9399E+01	-2.9399E+01

[ANTI-SYMMETRIC DISTURBANCE]

N	M	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
5	5	7.0480E+00	-1.6455E+01	-2.8896E+01	-2.8896E+01	-4.3839E+01
		0.	0.	7.5419E+01	-7.5419E+01	0.
10	10	1.9251E+01	-1.6107E+01	-2.9170E+01	-2.9170E+01	-6.0303E+01
		0.	0.	7.5616E+01	-7.5616E+01	4.4692E+01
15	15	1.8822E+01	-1.6091E+01	-2.9330E+01	-2.9330E+01	-6.3865E+01
		0.	0.	7.5630E+01	-7.5630E+01	3.2543E+01
30	25	1.8829E+01	-1.6091E+01	-2.9329E+01	-2.9329E+01	-6.3877E+01
		0.	0.	7.5629E+01	-7.5629E+01	3.2500E+01

表1. D n = 1000 の固有値

D n = 5000

[SYMMETRIC DISTURBANCE]

N	M	$\lambda 1$	$\lambda 2$	$\lambda 3$	$\lambda 4$	$\lambda 5$
5	5	1.2051E+01 3.1974E+02	1.2051E+01 -3.1974E+02	-2.5875E+01 0.	-3.2993E+01 2.1311E+02	-3.2993E+01 -2.1311E+02
10	10	-2.9658E+01 0.	-3.2593E+01 2.1033E+02	-3.2593E+01 -2.1033E+02	-4.3162E+01 2.8789E+02	-4.3612E+01 -2.8789E+02
15	15	-2.9541E+01 0.	-3.2582E+01 2.1036E+02	-3.2582E+01 -2.1036E+02	-4.5911E+01 2.8962E+02	-4.5911E+01 -2.8962E+02
30	25	-2.9520E+01 0.	-3.2627E+01 2.1036E+02	-3.2627E+01 -2.1036E+01	-4.5853E+01 2.9038E+02	-4.5853E+01 -2.9038E+02

[ANTI-SYMMETRIC DISTURBANCE]

N	M	$\lambda 1$	$\lambda 2$	$\lambda 3$	$\lambda 4$	$\lambda 5$
5	5	2.2386E+01 3.3765E+02	2.2386E+01 -3.3765E+02	-2.8344E+01 1.1512E+02	-2.8344E+01 -1.1512E+02	-3.0522E+01 0.
10	10	-2.1645E+01 0.	-2.5516E+01 1.6312E+02	-2.5516E+01 -1.6312E+02	-5.8127E+01 2.6814E+02	-5.8127E+01 -2.6814E+02
15	15	-2.2543E+01 0.	-2.5113E+01 1.6352E+02	-2.5113E+01 -1.6352E+02	-5.8902E+01 2.6360E+02	-5.8902E+01 -2.6360E+02
30	25	-2.2533E+01 0.	-2.5167E+01 1.6332E+02	-2.5167E+01 -1.6332E+01	-5.8930E+01 2.6384E+02	-5.8930E+01 -2.6384E+02

D n = 5000(4)

[SYMMETRIC DISTURBANCE]

N	M	$\lambda 1$	$\lambda 2$	$\lambda 3$	$\lambda 4$	$\lambda 5$
5	5	8.3185E-01 7.9667E+01	8.3185E-01 -7.9667E+01	-7.3447E+00 3.1189E+02	-7.3447E+00 -3.1189E+02	-2.1693E+01 0.
15	15	-2.3859E-01 2.4465E+02	-2.3859E-01 -2.4465E+02	-3.5529E+01 0.	-4.2342E+01 1.8910E+02	-4.2342E+01 -1.8910E+02
30	25	-2.6390E+01 3.1084E+02	-2.6390E+01 -3.1084E+02	-3.0955E+01 0.	-3.7737E+01 2.0787E+02	-3.7737E+01 -2.0787E+02
35	30	-2.4948E+01 3.0900E+02	-2.4948E+01 -3.0900E+02	-3.0770E+01 0.	-3.8155E+01 2.0730E+02	-3.8155E+01 -2.7030E+02

[ANTI-SYMMETRIC DISTURBANCE]

N	M	$\lambda 1$	$\lambda 2$	$\lambda 3$	$\lambda 4$	$\lambda 5$
5	5	-2.2519E+00 3.2442E+02	-2.2519E+00 -3.2442E+02	-1.2164E+01 9.8944E+01	-1.2164E+01 -9.8944E+01	-2.1970E+01 0.
15	15	9.8453E+01 0.	-3.8313E+00 1.3788E+02	-3.8313E+00 -1.3788E+02	-1.7730E+01 0.	-2.4292E+01 1.8879E+02
30	25	4.0509E+01 0.	-2.1303E+01 0.	-2.4985E+01 1.4298E+02	-2.4985E+01 -1.4298E+02	-2.9267E+01 2.0996E+02
35	30	3.8662E+01 0.	-2.1650E+01 0.	-2.2518E+01 1.4516E+02	-2.2518E+01 -1.4516E+02	-2.9084E+01 2.0447E+02

表2. D n = 5000 の固有値

D n = 10000

[SYMMETRIC DISTURBANCE]

N	M	$\lambda 1$	$\lambda 2$	$\lambda 3$	$\lambda 4$	$\lambda 5$
5	5	5.2218E+00 4.3939E+02	5.2218E+00 -4.3939E+02	-1.6180E+01 6.5554E+02	-1.6180E+01 -6.5554E+01	-3.1559E+01 3.4567E+02
10	10	-3.7628E+01 0.	-3.9624E+01 1.0349E+03	-3.9624E+01 -1.0349E+03	-4.5126E+01 3.3508E+02	-4.5126E+01 -3.3508E+02
35	20	-3.6657E+01 0.	-3.7979E+01 5.2540E+02	-3.7979E+01 -5.2540E+02	-5.1900E+01 3.2913E+02	-5.1900E+01 -3.2913E+02
46	23	-3.6645E+01 0.	-3.7976E+01 5.2543E+02	-3.7976E+01 -5.2543E+02	-5.1867E+01 3.2904E+02	-5.1867E+01 -3.2904E+02

[ANTI-SYMMETRIC DISTURBANCE]

N	M	$\lambda 1$	$\lambda 2$	$\lambda 3$	$\lambda 4$	$\lambda 5$
5	5	2.1599E+01 2.5234E+02	2.1599E+01 -2.5234E+02	1.0435E+01 6.8963E+02	1.0435E+01 -6.8963E+02	-3.3027E+01 4.8195E+02
10	10	-2.5336E+01 0.	-3.1136E+01 2.3539E+02	-3.1136E+01 -2.3539E+02	-6.6971E+01 4.9133E+02	-6.6971E+01 -4.9133E+02
35	20	-2.7590E+01 0.	-3.1967E+01 2.4637E+02	-3.1967E+01 -2.4637E+02	-7.0895E+01 3.7372E+02	-7.0895E+01 -3.7372E+02
50	21	-2.7593E+01 0.	-3.1969E+01 2.4636E+02	-3.1969E+01 -2.4636E+02	-7.0906E+01 3.7374E+02	-7.0906E+01 -3.7374E+02

D n = 10000(4)

[SYMMETRIC DISTURBANCE]

N	M	$\lambda 1$	$\lambda 2$	$\lambda 3$	$\lambda 4$	$\lambda 5$
5	5	3.4479E+01 4.4072E+02	3.4479E+01 -4.4072E+02	-1.8693E+01 2.7103E+02	-1.8693E+01 -2.7103E+02	-3.2339E+01 3.3031E+02
10	10	-2.3179E+01 8.3787E+00	-2.3179E+01 -8.3787E+00	-3.4260E+01 2.1588E+02	-3.4260E+01 -2.1588E+02	-4.6493E+01 3.3299E+02
35	20	-3.6657E+01 0.	-3.7979E+01 5.2540E+02	-3.7979E+01 -5.2540E+02	-5.1900E+01 3.2913E+02	-5.1900E+01 -3.2913E+02
46	23	-3.6359E+01 0.	-3.6688E+01 5.1113E+02	-3.6688E+01 -5.1113E+02	-5.5191E+01 3.2987E+02	-5.5191E+01 -3.2987E+02

[ANTI-SYMMETRIC DISTURBANCE]

N	M	$\lambda 1$	$\lambda 2$	$\lambda 3$	$\lambda 4$	$\lambda 5$
5	5	9.9690E+00 2.2422E+02	9.9690E+00 -2.2422E+02	-5.8166E+00 6.6627E+02	-5.8166E+00 -6.6627E+02	-1.8451E+01 4.5620E+02
10	10	1.0270E+02 0.	-1.6945E+01 0.	-2.1879E+01 9.1604E+01	-2.1879E+01 -9.1604E+01	-4.0950E+01 2.4728E+02
35	20	7.2610E+01 0.	3.5891E+01 3.5571E+02	3.5891E+01 -3.5571E+02	-2.4030E+01 0.	-3.0564E+01 1.9705E+02
50	21	6.8599E+01 0.	3.6177E+01 2.9125E+02	3.6177E+01 -2.9125E+02	-2.6043E+01 0.	-2.8862E+01 2.3909E+02

表3. D n = 10000の固有値

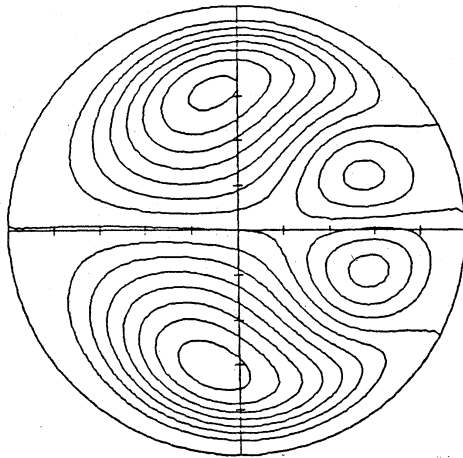
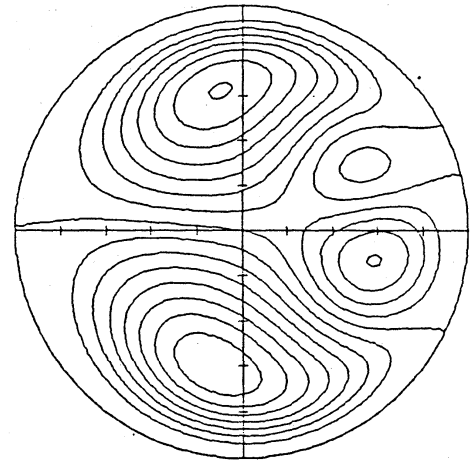
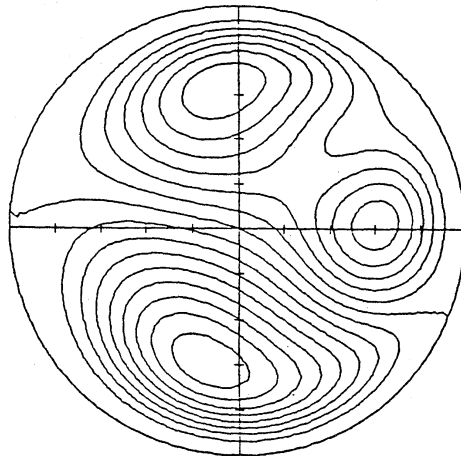
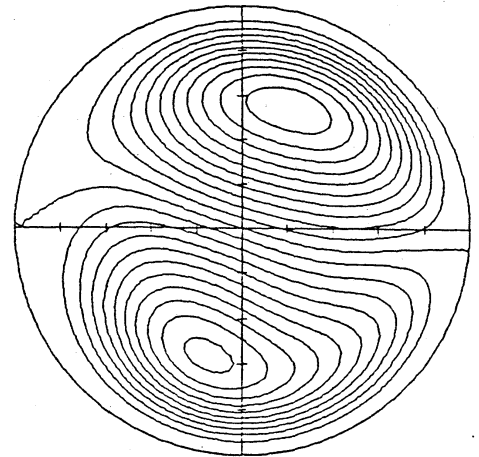
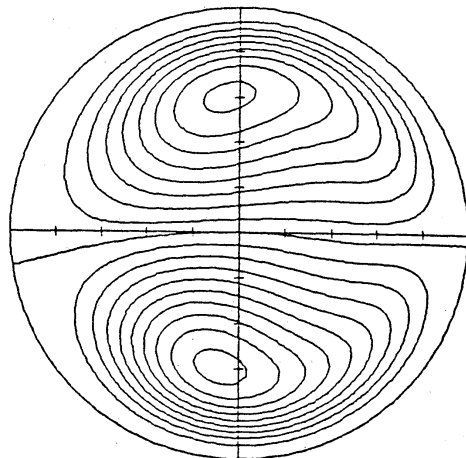
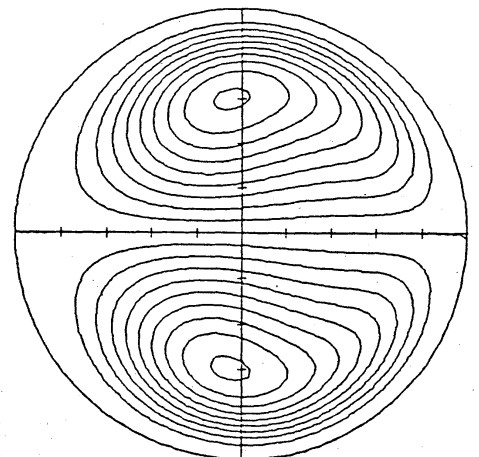
$T=0.2$  $T=0.25$  $T=0.3$  $T=0.35$  $T=0.4$  $T=0.6$ 

図5. $Dn=1000$ (4) に反対称攪乱を加えたときの流線の時間的变化